Table des matières

1 Préliminaires **1**

1.1 Notations et notions générales 1

1.1.1 Opérateurs différentiels 1

1.1.2 Espaces fonctionnels 2

1.2 Théorèmes et formules fondamentaux 4

1.2.1 Formules de Green 5

1.2.2 Inégalité de Hôlder 6

1.2.3 Formes quadratiques 6

1.3 Semi-groupe et générateur infinitésimal 8

1.3.1 Semi-groupe 8

1.3.2 Générateur infinitésimal 8

1.4 Notion de l'existence locale et globale 9

1.4.1 Existence locale et unicité 9

1.4.2 Existence globale 11

1.5 Système de réaction-diffusion 12

1.5.1 Introduction 12

1.5.2 Modélisation 13

1.5.3 Exemples 14

2 Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion diagonale$(m \times m)$ **17**

2.1 Construction de la fonctionnelle polynomiale 19

2.2 Existence globale 28

2.3 Exemple 29

3 Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion pleine $m \times m$ **30**
3.1 Construction d'une région invariante : 32
3.2 Existence globale 34

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous tenons à remercier particulièrement mon encadreur le docteur **Toualbia Abdelatif** qui à proposé le thème de ce mémoire, pour son conseils, pour son aide précieuse et pour le temps qu'il m'a consacré.

Nous remercions le **Dr :B.Rebiai** d'avoir accepter de présider le jury.

Nous remercions le **Dr :H.Mecheri** d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Enfin, nous exprimons nos sincères remerciements à tous ceux qui nous ont aidés et notre soutien.

Resumé

Le but de ce travail est de prouver l'existence globale en temps des solutions de systèmes de réaction - diffusion $m \times m$ à matrice de diffusion diagonale puis à matrice de diffusion pleine (symétrique).
Pour cet objectif, on construit une fonctionnelle de Lyaponov (polynomiale) et une région invariante et si les termes de réaction vérifient certaines conditions, on déduit l'existence globale
Mots clés : systèmes de réaction-diffusion, existence globale, fonctionnelle de Lyaponov (polynomiale), région invariante, matrice de diffusion pleine.

abstract

The purpose of this paper is established the global existence in time of solutions for reaction-diffusion systems $m \times m$ with a diagonal matrix of diffusion coefficients then with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients.

For this purpose, we construct a Lyaponov (polynomial) functional and the invariant regions and if the reaction terms satisfy some conditions, we deduces the global existence

Key words : reaction diffusion systems, global existence, Lyaponov (polynomial) functional, invariant regions, full matrix of diffusion coeffcients

.

Notations et Symboles

$S-R-D$	Système de réaction diffusion.
Ω	Domaine ouvert de R^n.
$\partial\Omega$	La frontière.
R^n	L'ensemble des réels de dimensions n.
$d\sigma$	La mesure de surface sur Γ.
$\frac{\partial u}{\partial t}$	La dérivée partielle de u par rapport au temps t.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	La dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$
: $\bigtriangledown u$	Le gradient de u.
$\bigtriangledown .u$	La divergence de u.
Δu	Le laplacien de u.
$\|u\|$	La norme de u.
$L(E,F)$	L'espace des opérateurs linéaires et continus.
$D(\Omega)$	L'espace des fonctions tests
$\sum$	Région invariant
$L(t)$	Fonction de Lyapunov

Introduction

Les systémes de reaction-diffusion sont des systémes couplés d'equations différentielles aux dérivées partielles de types prabolique
Ces systèmes s'écrivent dans leur forme la plus simple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \tag{1}$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$est l'inconnue,

$$f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_n(x,t,u(x,t)))$$

est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion.
Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u.

Au chapitre1 : (Notations et notions générales)

Ce chapitre se compose de trois sections, dans la premiére section en donne des notations, quelque symboles certains opérateurs et quelques espaces avec leurs normes utilisées, la deuxième section c'est un rappel sur quelque théorème fondamenteaux, théorie de semi groupe et existence locale et globale, a la troisièmme (la modelisation) on va éxposer les méthodes génèrales transformants les phénoménes naturels à des S-R-D, et on va étudier trois exemple : en chimie, un phénomène de la physique nucléaire, en génètique.

Au chapitre 2 : (Existence globale pour les S-R-D de m-composante à matrice de diffusion diagonale)

Dans ce chapitre on va étudier l'existence globale de solution des S-R-D formé de m équation avec les conditions au limites diverses (Dirichlet, Neuman, Robin).Pour cette raison on utilise une fonctionnelle de lyaponov borné associée à ces systémes

$$L(t) = \int_\Omega H_{p_m}(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x))dx$$

$$H_{p_m}(u_1, u_2, ..., u_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} ... \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_m^{p_m-p_{m-1}}$$

Le systéme que nous étudions est la suivant

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a_i \triangle u_i = f_i(u_i) \text{ sur } R^+ \times \Omega, \ \ \forall i = 1, ..., m$$

avec les conditions ou bords :

$$\lambda_i u_i + (1-\lambda_i)\,\partial_\eta u_i = \beta_i \qquad \text{on } \partial\Omega \times R^+$$

et les conditions initiales :

$$u_i(0,x) = u_i^0(x) \;\; \text{sur } \Omega$$

Au chapitre 3 : (Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion pleine)
Dans ce dernier chapitre on va prouver l'éxistence globale pour un S-R-D à matrice de diffusion pleine à l'aide de région invariante, ce systéme est de la forme

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - A\Delta u_i = f_i(u_1,\ldots,u_m) \qquad \text{dans} \quad R^+ \times \Omega$$

Avec les conditions aux bords

$$\lambda u_i + (1-\lambda)\frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \beta_i \qquad dans\ R^+ \times \partial\Omega$$

et les conditions initiales

$$u_i(0,x) = u_i^0(x) \qquad \text{dans } \Omega$$

est la matrice de diffusion

$$A = (a_{ij})_{i.j=1,..,m} \quad \text{avec } a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le technique usuelle basée sur la fonctionnelle de lyaponov

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et notions générales

1.1.1 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, x_2...., x_n)$ un point (ou vecteur) de R^n :
On appelle champ des vecteurs sur R^n une application $v : R^n \to R^n$, qui à $x = (x_1, x_2..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), v_2(x)...., v_n(x))$.
Pour une fonction $u : R^n \to R^n$, son gradient est le champ de vecteurs défini par

$$\text{grad } u(x) = \bigtriangledown u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \tag{1.1}$$

alors

$$|\bigtriangledown u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

Pour un champ des vecteurs $v : R^n \to R^n$ on appelle divergence de v la fonction définie par

$$\text{div } v(x) = \bigtriangledown . v = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \tag{1.2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Soit Ω un domaine borné de R^n, avec frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ et $d\sigma$ est une mesure de surface sur Γ.

On appelle Laplacien d'une fonction $u : R^n \to R^n$ la fonction définie par

$$\triangle u(x) = \operatorname{div}(\bigtriangledown u)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \tag{1.3}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

Soit Ω un domaine borné de R^n, avec frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ et $d\sigma$ est une mesure de surface sur Γ.
On appelle normale à Γ un champ des vecteurs $\eta(x)$ défini sur le bord Γ tel qu'en tout point $x \in \Gamma, \eta(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.
On appelle normale extérieure une normale qui point vers l'extérieure du domaine en tout point.
On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord Γ la fonction définie sur les points de Γ par $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \bigtriangledown u(x).\overrightarrow{\eta}$ (produit scalaire du vecteur $\bigtriangledown u(x)$ avec le vecteur $\eta(x)$).

1.1.2 Espaces fonctionnels

$L(E, F)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires et continues (ou bornés) de E dans F muni de la norme

$$\|A\|_{L(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Ax\|_F \tag{1.4}$$

On pose $L(E, F) = L(E)$
On désigne par $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ l'espace des fonctions définie par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to R, \text{mesurable} : \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty, \ 1 \leq p \leq \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx. \tag{1.5}$$

On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables et vérifient

$$|u| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega$$

où c est une constante positive. $L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c, \ \ |u| \leq c \ \ p.p \text{ sur } \Omega\} \tag{1.6}$$

On définit les espaces $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty(0,T,X)$ comme suit :

$$L^p(0,T,X) = \left\{ u : [0,T] \to X \ \text{ mesurable}, \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|u\|_X^p \, dt \tag{1.7}$$

$$L^\infty(0,T,X) = \left\{ u : [0,T] \to X \ \text{ mesurable}, \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u\|_X < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u\|_X \tag{1.8}$$

D'autre terme :

$$u(t,x) \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) \Longleftrightarrow \sup_{t\in(0,T)} \|u(t,x)\|_{L^p(\Omega)} < \infty$$

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)| \tag{1.9}$$

$C^k(\Omega), 0 \leq k \leq \infty$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égal à k existent et sont continue dans Ω.
$C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne les sous-espaces vectoriel des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.
$D(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans Ω.
$\acute{D}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ 1 \leq i \leq n \right\} \tag{1.10}$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \tag{1.11}$$

$$= \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\bigtriangledown u|^2 \, dx$$

donc

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u \mid_{\Gamma} = 0 \right\} \tag{1.12}$$

D'une façon générale pour $m \in N^*$ et $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in N^n \text{ vérifent } |\alpha| \leq m \right\} \tag{1.13}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}, \tag{1.15}$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \tag{1.16}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}; \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

est la dérivée au sens des distribution.
Naturellement on a : $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ et $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

1.2 Théorèmes et formules fondamentaux

Nous présentons des propositions, des théorèmes avec démonstrations utilisés dans les chapitres suivants

Théorème 1.1 ***(D'ostrogradski ou théorème de la divergence)*** *Soit S une surface fermée, frontière d'un domaine de volume V. Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieure du domaine à l'extérieur, et désignons par α, β et λ les angles que fait cette normale avec la direction des x, y et z positifs respectivement alors, si A_1, A_2 et A_3 sont des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans le domaine, le théorème de la divergence s'exprime ainsi*

$$\int_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dv = \int_s A_1 dydz + A_2 dxdz + A_3 dxdy$$

sous forme vectorielle avec $A = (A_1 + A_2 + A_3)$, ceci peut s'écrire simplement

$$\int_V \bigtriangledown .A dv = \int_s A.\eta ds$$

Ce théorème est appelé encore la théorème de Green dans l'espace.

Preuve. voir Spiegel [33] . ■

1.2.1 Formules de Green

Nous rappelons maintenant quelques formules de Green qui généralisent au cas multi dimensionnel la formule d'intégration par parties de la dimension un. Elles s'écrivent de la manière suivante :

Théorème 1.2 *On suppose que Ω est un domaine ouvert de frontière $\partial\Omega$ continue par morceaux. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.17}$$

on désigne par η_i le $i^{éme}$ cosinus directeur de la normale η à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieure de Ω et on écrit $\eta_i = (\overrightarrow{\eta}.\overrightarrow{e})$. $d\sigma$ la mesure de surface sur Γ.

Corollaire 1.1 *Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green*

$$\int_\Omega (\triangle u)v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown v.$$

Preuve. Voir A. Munnier[27, pg.33]. ■

1.2.2 Inégalité de Hôlder

Soient $u \in L^p$ et $v \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 < p, q < \infty$. Alors l'inégalité de Hôlder s'écrit :

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(i.e) $u.v \in L^1$ et

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

1.2.3 Formes quadratiques

Définition 1.1 *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré relativement aux n variables $u_1, u_2, ..., u_n$. Une forme quadratique a toujours la représentation*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

est une matrice symétrique.

Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ par u et la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$ par $A(U, U)$,

$$A(U, U) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \tag{1.18}$$

nous pouvons écrire

$$A(U, U) = U^t AU = AU.U$$

Définition 1.2 *Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice symétrique réelle, la forme (1.18) est dite forme quadratique réelle.*
Dans ce travail, on s'intéresse que des formes quadratiques réelles.

Définition 1.3 *Une forme quadratique(1.18)est dite définie positive si*

$$A(U, U) > 0,\ \forall u \in R^n,\ u \neq 0$$

Théorème 1.3 *Une forme quadratique* (1.18) *est définie positive si et seulement si tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs*

$$\det 1>0,\ \ \det 2>0,....,\ \ \det n>0$$

Preuve. *Voir F. R. Gantmacher* $[10, pg.308]$. ■

Corollaire 1.2 *Dans une forme quadratique définie positive (1.18) tous les déterminants principaux de la matrice des coefficients, sont positifs, lorsque les déterminants principaux successifs d'une matrice symétrique réelle sont positifs, tous les déterminants principaux restants sont positifs.*

Preuve. Voir F. R. Gantmacher [11, pg. 306] . ■

Fonctionnelle de Lyapunov

Définition 1.4 *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de* m *équations, toute fonction*

$$L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

telle que

$$\frac{d}{dt}\left(L\left(u_1\left(t,.\right),...u_m\left(t,.\right)\right)\right) \leq 0 \tag{1.19}$$

pour tout $t > 0$ *et toute solution* $\left(u_1\left(t,.\right),...u_m\left(t,.\right)\right)$ *de systeme.*

Région invariante

Définition 1.5 *Un sous-ensemble fermé* $\sum \subset \mathbb{R}^n$ *est appelé une région invariante pour le système défini par*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f\left(u\right) \tag{1.20}$$

si toute solution $u(x,t)$ *ayant ses valeurs initiales et aux limites dans* $\sum$ *reste dans* $\sum$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et pour toute* $t \in [0, t^*)$ *où* $t^* < T_{\max}$.

Théorème 1.4 *Si dans* (1.20) *on a*

$$\begin{cases} f_1\left(0, u_2, ..., u_m\right) \geq 0 \\ f_1\left(u_1, 0, ..., u_m\right) \geq 0 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ f_1\left(u_1, u_2, ..., 0\right) \geq 0 \end{cases}$$

$\forall u_1, u_2, ..., u_m \geq 0$, *alors la région* $\sum = \{(u_1, u_2, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m,\ u_1 \geq 0; u_2 \geq 0, ..., u_m \geq 0\}$ *,est invariante.*

Théorème 1.5 *Si dans(1.20) on a*

$$\begin{cases} f_1(M_1, u_2, ..., u_m) \leq 0 \\ f_1(u_1, M_2, ..., u_m) \leq 0 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ f_1(u_1, u_2, ..., M_m) \leq 0 \end{cases}$$

$\forall u_1, u_2, ..., u_m \geq 0$, *alors la région*

$$\sum = \{(u_1, u_2, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m, u_1 \leq M_1; u_2 \leq M_2, ..., u_m \leq M_m\}$$

est invariante.

1.3 Semi-groupe et générateur infinitésimal

1.3.1 Semi-groupe

Définition 1.6 *Soit X un espace de Banach, alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe si les conditions suivantes sont satisfaisantes*

a) $S(0) = I$.

b) $S(t)S(s) = S(t+s)$, *pour tout* t *et* $s \geq 0$

Définition 1.7 *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit*

(i)***Uniformément continu*** *si* $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)u - u\| = 0$ *dans* X, *pour tout* $u \in X$.

(ii)***Fortement continu*** *ou de* ***classe*** C_0 *si* $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u, \forall u \in X$.

(iii)***Semi-groupe de contraction*** *s'il est de classe* C_0 *et* $\|S(t)\| \leq 1$.

Théorème 1.6 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X, alors il existe deux constantes $M \geq 1, w \geq 0$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}$$

pour tout $t \geq 0$

1.3.2 Générateur infinitésimal

Définition 1.8 *On dit que $A : D(A) \subset X \to X$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ si*

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\} \tag{1.21}$$

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \text{ pour tout } u \in D(A) \tag{1.22}$$

Proposition 1.1 *Soit $S(t)$ un semi-groupe continu sur X de générateur infinitésimal A, alors*
a) A est un opérateur linéaire fermé, de domaine $D(A)$ dense dans X ($D(A)$ est muni de la norme du graphe.
b) pour $u \in D(A)$, $S(t)u \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u = S(t)Au, \text{ pour tout } t \geq 0$$

c)pour $u \in X$, $\int_0^t S(s)\,ds \in D(A)$ et $A\left(\int_0^t S(s)u ds\right) = s(t)u - u_0$

Preuve. Voir A. Pasy [29, pg. 5]. ■

Remarque 1.1 *Sur $E = R^N$, l'opérateur A est une matrice de $M_N(R)$. $S(t) = e^{At}$ définit un semi-groupe. L'exponentielle d'une matrice est définie par une série entière donc on peut écrire $S(t)$ comme suit*

$$S(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

Théorème 1.7 ***(de Hille-Yosida)***
La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine dense dans X soit un générateur d'un semi-groupe fortement continu est qu'il existe $w \in R$ tel que :
i)$(\lambda I - A)^{-1}$existe pour tout $\lambda : Re\lambda > w$,
ii)$\left\|(\lambda I - A)^{-k}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^k}, k = 1, 2, ...$ pour $Re\lambda > w$.

Preuve. Voir H.Brezis [6,pg.105] . ■

Proposition 1.2 *Le Laplacien dans R^n est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans $L^2(R^n)$ (d'autre choix sont possible, par exemple $X = H_0^1(\Omega)$).*

Preuve. Voir H.Brezis [6]. ■

1.4 Notion de l'existence locale et globale

1.4.1 Existence locale et unicité

L'étude d'existence locale et d'unicité des solutions du problème des équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaire abstraites (Voir A. Friedman[1] , D. Henry [15] et A. Pazy [31]).

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A)X \subset X$ un opérateur linéaire, $f : X \to X$.
Étant donné, $u_0 \in X$.
Considérons le problème d'évolution non homogène à valeur initiale :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f,\ t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{Γ}$$

Définition 1.9 *On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t \geq 0$ à valeurs dans X est une **solution locale** du problème (Γ), s'il existe u définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$ qui pour tout $t < T^*$ est l'unique solution de (Γ) dans $C^1([0, T^*[, X)$.*
En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu.
i) $T^* = \infty$
ii) $T^* < \infty$ *et* $\lim_{t \to T^*} \|u\| = \infty$

Remarque 1.2 •*Si la propriété **(i)** est satisfaite, on dit que la solution u est **globale**.*
•*Si **(ii)** est satisfaite,on dit que u est **une solution explose en temps fini.***

Exemple 1.1 *Considérons le problème*

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} &= f(u), t > 0 \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 1.2 •*Si $f(u) = u^2$, la solution du problème (1.22)est donnée, pour $0 \leq t < 1$, par $u(t) = \frac{1}{1-t}$.*

•*La solution est donc explose lorsque t s'approche de 1, donc il y a **une solution non globale**.*
•*Si $f(u) = u$, la solution du problème est donnée par $u(t) = e^t$, donc le problème de Cauchy admet une solution unique globale.*

Théorème 1.8 *On suppose que A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $G(t)$ dans X. Alors pour tout $u_0 \in X$ et tout f localement lipchitzienne, il existe une fonction u unique solution du problème (1.21).*
De plus, u est donné par la formule :

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds$$

$$G(t) = e^t$$

Preuve. voir D. Henry [12]. ■

1.4.2 Existence globale

Nous donnons dans ce paragraphe une idée de l'état des connaissances sur l'existence globale des solutions. Il est bien connu que (voir J. Smoller [32]), pour démontrer l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion, il suffit de montrer que les termes de réaction sont $L^{\infty}(0,T,L^{p}(\Omega))$ pour un certain $p>\frac{n}{2}$.

Théorème 1.9 ***(Existence globale par l'effet régularisant)***
Soit le problème

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(t,x,u) \text{ sur } [0,T[\times\Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sur } [0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad\qquad x\in\Omega \end{cases} \tag{1.23}$$

Si $f(t,x,u)\in L^{\infty}(0,T,L^{p}(\Omega))$ *pour* $p>\frac{n}{2}$, *où* $n=\dim\Omega$ ***(i.e)***
$f(t,x,u)\in L^{\infty}(0,T,L^{p}(\Omega)) \Leftrightarrow \sup\limits_{0<t<T}\|f(t,x,u)\|_{L^{p}(\Omega)}<+\infty$

$$\Longleftrightarrow \exists c>0, \int_{\Omega}|f(t,x,u)|^{p}dx\leq c, \forall t\in[0,T]$$

alors la solution de l'équation (1.23) *et globale.*

Preuve. Voir D. Henry [12] . ■

Exemple 1.3 *Considérons le système*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -u^{\alpha} \text{ sur } [0,T[\times\Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sur } [0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad\qquad x\in\Omega \end{cases} \tag{1.24}$$

Nous allons étudies l'existence globale du problème$(1,24)$.
On multiplie l'équation du problème$(1,24)$ *par* u^{α} *et intègre sur* Ω,*on obtient*

$$\int_{\Omega}u^{\alpha}u_t - \int_{\Omega}u^{\alpha}\Delta u dx = -\int_{\Omega}u^{2\alpha}dx.$$

$$\frac{1}{1+\alpha}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^{\alpha+1}dx + \alpha\int_{\Omega}u^{\alpha-1}|\nabla u|^{2}dx\leq 0$$

$$\frac{1}{1+\alpha}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^{\alpha+1}dx\leq 0$$

$$\int_{\Omega} u^{\alpha+1}(t,x)\,dx \leq \int_{\Omega} u^{\alpha+1}(0,x)\,dx < \infty$$

On a

$$\int_{\Omega} |f|^p\,dx = \int_{\Omega} u^{\alpha p} dx,\ p > \frac{n}{2}$$

posons

$$\int_{\Omega} u^{\alpha p} dx \leq \int_{\Omega} u^{\alpha+1} dx$$

alors

$$\frac{n}{2} < p < \frac{\alpha+1}{\alpha} \Rightarrow n < 2 + \frac{2}{\alpha}$$

alors d'après théorème de l'effet régularisant, la solution est globale en $n = 1 \vee n = 2$.

1.5 Système de réaction-diffusion

1.5.1 Introduction

Durant les années récentes, les systèmes de réaction-diffusion ont reçu un grand traité d'attention, motivé par leur incident répandu dans des modèles de phénomènes biologiques et chimiques, et par la richesse de la structure de leurs ensembles des solutions. Vu les applications nombreuses et variantes de ces systèmes, on donnera les démarches suivies pour modéliser certains problèmes chimiques comme les réactions chimiques oscillantes (Brussélateur). Les individus diffèrent d'un problème à un autre :
En chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques. **En biochimie**, ilspeuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. **En dynamique des populations**, ce sont des humains. **En génétique des populations**, ils représentent des caractères. **En biophysique**, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. **En environnement**, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt , d'une mer ou bien d'une fleuve...Pour la plus grande partie de ces problèmes, on montre qu'on aboutit à des systèmes de réaction-difusion.
Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié : s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives : en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement.

En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densités de populations humaines, animales ou végétales...
Les conditions initiales sont généralement positives, puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques ...

Tous ces problèmes s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \tag{1.25}$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_m(x,t))$est l'inconnue,

$$f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_m(x,t,u(x,t)))$$

est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion.
Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u.
En chimie u est vecteur de concentrations chimiques et f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations.
Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.
En dynamiques des populations, u représente le vecteur de densités des populations et f l'effet des relations prédateurs-proie des relations de compétitions ou de symbiose.
Le terme $D\Delta u$ représente des mouvements aléatoires d'individus de la population étudiée.

1.5.2 Modélisation

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (1.25), d'ailleurs qui est la méme pour tous les phénomènes cités dans l'introduction, puis nous donnons des exemples.
On considère une région bornée de R^2 ou R^3(qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ses réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire, d'ailleurs la cellule vivante est le siége de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux
de miliers de virus et rumeurs circlculant entre les individus des populations...).
Si on note par $u_i(x,t)$ la concentration de la i^{ieme}espéce pernant part dans ces réactions, $f_i(x,t,u_1(x,t), ...,$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$ et soit J_i le flux de ces espéces à travers la frontiére Γ de notre région Ω. Considérons un volume V infiniment petit de la région de frontiére $S = \partial V$.

La vitesse de formation de la i^e espéce dans le volume V est égale à la quantité formée par la réaction otéé de son flux à travers la surface S, en termes d'équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v u_i(x,t)dx = \int_v f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t)dx - \int_s J_i d\sigma \tag{1.26}$$

donc

$$\int_v \left(\frac{\partial}{\partial t} - f_i + \nabla.J_i\right) dx = 0, \qquad i = 1,...,n \tag{1.27}$$

Puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, on en déduit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla.J_i = f_i\ , \qquad i = 1,...,n \tag{1.28}$$

Remarque 1.3 *Dans le cas d'une réaction chimique, le terme de réaction f_i vient de l'application (sur le pan microscopique) de la loi d'action des masses (ou loi de Gulberg et Waage).D'ailleurs dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable. Le flux (ou la diffusion)est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick)*

$$J_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\nabla u_j \tag{1.29}$$

où

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$$

est une matrice définie positive appelée matrice de difusion.En substituant (1.29) dans (1.28), on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla.\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\nabla u_j\right) = f_i \tag{1.30}$$

normalement les a_{ij} sont constants, quoi qu'ils peuvent dépendre de t, x et u. Aussi on va considérer des termes de réactions dépendant seulement de u, dans ce cas on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f\,(u)$$

1.5.3 Exemples

En chimie

Peut-être la plus grande source de problèmes intéressants dans ce domaine est la modélisation des Réactions chimiques multispécifiques.

Nous considérons ensuite un mécanisme réactionnel général de la forme :

$$\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + ... + \mu_r R_r \underset{k_r}{\overset{k_f}{\rightleftarrows}} \nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 + ... + \nu_l P_l \tag{1.31}$$

Où R_i et P_i représentent les espèces de réactif et de produit, respectivement, et μ_i, ν_i sont des constantes positives pour chaque i. Si nous définissons $\mu_i = [R_i]$ et $\nu_i = [P_i]$ et laisser k_f, k_r les taux de réaction directe et inverse (non négatifs) respectivement, nous pouvons modéliser le processus en appliquant la loi de conservation de la masse Et la seconde loi de Fick (débit) avec le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla.(a_i \nabla u_i) = \mu_i \left(k_r \prod_{j=1}^{l} v_j^{\nu_j} - k_f \prod_{j=1}^{r} u_j^{\mu_j} \right), & i = 1, ..., r \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} - \nabla.(a_{r+i} \nabla v_i) = \nu_i \left(k_f \prod_{j=1}^{r} u_j^{\mu_j} - k_r \prod_{j=1}^{l} v_j^{\nu_j} \right), & i = 1, ..., l \end{cases} \tag{1.32}$$

Nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné Ω de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$

Remarque 1.4 *La matrice diagonale D peut dépendre de t,x et u, comme il peut ne pas être diagonale (c'est le cas lorsque la diffusion d'une espèce affecte le rythme de production des autres).*

Par exemple, considérons la réaction réversible suivante apparemment simple,dont laquelle le dioxyde de soufre réagit avec l'oxygène pour former le trioxyde de soufre :

$$2SO_2 + O_2 \underset{k_r}{\overset{k_f}{\rightleftharpoons}} 2SO_3 \tag{1.33}$$

Si nous nous fixons u = $[SO_2]$, v = $[O_2]$, et w = $[SO_3]$, puis cette réaction, dans l'hypothèse d'une action massive cinétique, peut être modélisée par le système de réaction-diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u &= 2\left(k_r w^2 - k_f\, u^2 v\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v &= \left(k_r w^2 - k_f\, u^2 v\right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - d_3 \Delta w &= 2\left(k_f\, u^2 v - k_r w^2\right) \end{aligned}$$

Avec conditions initiales non négatives L^∞ et conditions aux bords homogènes de Neumann .Ici, les d_i sont les coefficients positifs de diffusion et k_f , k_r sont respectivement les coefficients positifs avant et arrière de réaction et nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné de frontière suffisamment régulière (voir Hollis et Morgan [8]).

Un modèle génétique

On considère une population d'individus "diploïdes", c'est-à-dire chez qui l'information génétique est dédoublée. On suppose qu'un certain gène sur une certaine paire de chromosomes se présente sous deux formes possibles, ou allèles, que l'on notera a et A.
La population se subdivise alors en individus "homozygotes" de type aa ou AA, et "hétérozygotes" de type aA. Notons $\rho_1(t,x)$, $\rho_2(t,x), \rho_3(t,x)$ la densité d'individus de type aa, aA, AA respectivement, au point x et à l'instant t. Supposons que les individus constituant la population se reproduisent avec un taux r (indépendant du génotype), et se déplacent aléatoirement dans l'espace suivant un mouvement brownien de constante d (également indépendante du génotype). On suppose en revanche que les taux de décés τ_1, τ_2, τ_3 des trois populations peuvent légèrement différer. Alors les densités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont solution du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - d\Delta\rho_1 = -\tau_1\rho_1 + \frac{r}{\rho}\left(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2\right)^2 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - d\Delta\rho_2) = -\tau_2\rho_2 + \frac{2r}{\rho}\left(\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2\right)\left(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2\right) & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial t} - d\Delta\rho_3 = -\tau_3\rho_3 + \frac{r}{\rho}\left(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2\right)^2 & \text{sur } (0,+\infty)\times\Omega \end{cases}$$

où $\rho(t,x) = \rho_1(t,x) + \rho_2(t,x) + \rho_3(t,x)$

En physique nucléaire

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le système de réaction-difusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1\Delta u + u\left(av - b\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2\Delta v + cv \end{cases} \quad \text{sur} \quad (0,+\infty)\times\Omega \qquad (\bullet)$$

avec conditions aux bords homogènes de Newman et conditions initiales positives. On montre que (voir Pao [42]), pour $a > 0, b \geq 0$ et $c > 0$, la solution du système $(\bullet)$ avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini (cesse d'exister). Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = u_{xx} - \sigma u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_{xx} + \sigma v \end{cases} \quad \text{sur } (0,+\infty)\times(0,1)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u_x(0,t) = ag\left(v(0,t)\right) \\ u_x(1,t) = 0 \\ v_x(0,t) = 0 \\ v_x(1,t) = ag\left(u(0,t)\right) \end{cases}$$

et conditions initiales positives. Ce modèle a été étudié par Pao [32].

Chapitre 2

Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion diagonale$(m \times m)$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion à matrice de diffusion diagonale $(m \times m)$
Considérons le système formé de m équations aux dérivées partielles du type réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - a_i \triangle u_i = f_i(u_i) \ \text{ sur } \Omega \times R^+, \ \ \forall i = 1, ..., m \tag{2.1}$$

avec les conditions aux bords :

$$\lambda_i u_i + (1 - \lambda_i)\, \partial_\eta u_i = \beta_i \qquad \text{on } \partial\Omega \times \{t > 0\} \tag{2.2}$$

et les conditions initiales :

$$u_i(0, x) = u_i^0(x) \ \text{ sur } \Omega \tag{2.3}$$

pour tout $i = 1, .., m.$

(i) Pour les conditions aux bords nonhomogènes de Robin, on utilise

$$0 < \lambda_i < 1 \text{ et } \ \beta_i \geq 0. \ i = 1, .., m.$$

(ii)Pour les conditions aux bords homogènes de Neumann, on utilise

$$\lambda_i = \beta_i = 0. \qquad i = 1, .., m.$$

(iii)Pour les conditions aux bord homogènes de Dirichlet, on utilise

$$1 - \lambda_i = \beta_i = 0 \ , \ \ i = 1, .., m.$$

(iv)Pour les conditions mêlées : conditions homogènes de Dirichlet et conditions nonhomogènes de Robin, on utilise

$$\exists i = 1, ..., m : \ 1 - \ \lambda_i = \beta_i = 0 \text{ et } 0 < \lambda_j < 1 \text{ et } \beta_j \geq 0 \ . \ j = 1, .., m \text{ avec i} \neq \text{j}$$

où Ω est un ouvert borné de R^n, $U = (u)_{i=1}^m$ et a_i sont des constantes positives $\forall i = 1, ..., m$, et pour :$i = 1, ..., m$ $0 < \lambda_i < 1$ et $\beta_i \geq 0$ sont dans $C^1 \left(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+\right)$.
Les conditions initiales sont supposées être non négatives.
On suppose que :
Les fonctions f_i sont continûment différentiables sur R_+^m pour tout $i = 1, ..., m$, avec

$$f_i(u_{1...}, 0, u_{i+1}, ..., u_m) \geq 0, \text{ pour tout } u_i \geq 0, \ i = 1, ..., m$$

et vérifient

$$\sum_{i=1}^{m-1} D_i f_i(U) + f_m(U) \leq c_1 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i\right) \tag{2.4}$$

et

$$|f_i(U)| \leq C_2 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i\right)^N \text{ sur } (0, \infty)^m \tag{2.5}$$

pour C_1, C_2sont des fonctions positives et uniformément bornées et définies sur $\mathbb{R}_+^m$
Posons

$$A_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2\sqrt{a_i a_j}}, \ \forall i, j = 1, ..., m$$

Soient θ_i des constantes positives telles que :

$$\text{K}_l^l\text{>0, } l = 2, ..., m \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned}
K_l^r &= K_{r-1}^{r-1}.K_l^{r-1} - \left[H_l^{r-1}\right]^2, r = 3, ..., l \\
H_i^r &= \det_{\substack{1 \leq i,j \leq l \\ j \neq l-1,...,r}} \left((a_{ij})_{\substack{i \neq l,...,r+1}}\right) . \prod_{k=1}^{k=r-2} (\det k)^{2^{(r-k-2)}}, \quad r = 3, ..., l-1 \\
K_l^2 &= a_1 a_l \prod_{k=1}^{l-1} \theta_k^{2(p_k+1)^2} . \prod_{k=1}^{k=m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} . \left[\prod_{k=1}^{k=l-1} \theta_k^2 - A_{1l}^2\right]
\end{aligned}$$

et

$$H_l^2 = a_1\sqrt{a_2 a_l}\theta_1^{2(p_1+1)^2}\prod_{k=2}^{k=l-1}\theta_k^{2(p_k+2)^2+(p_k+1)^2}.\prod_{k=l}^{k=m-1}\theta_k^{2(p_k+2)^2}.\left[\theta_1^2 A_{2l} - A_{12}A_{1l}\right]$$

On note par $\det_{1\le i,j\le l}\left((a_{ij})_{\substack{i\neq l,\dots,r+1\\ j\neq l-1,\dots,r}}\right)$ le déterminant de la matrice carrée symétrique d'ordre r obtenue à partir de $(a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ en supprimant les $(r+1),(r+2),\dots$ ligne et les (r) , $(r+1),\dots,(l-1)$ colomnes. Les élément de cette matrice définit par

$$a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}\theta_1^{p_1^2}\dots\theta_{(i-1)}^{p_{(i-1)}^2}\theta_i^{(p_i+1)^2}\dots\theta_{j-1}^{(p_{(j-1)}+1)^2}\theta_j^{(p_j+2)^2}\dots\theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2}. \tag{2.7}$$

2.1 Construction de la fonctionnelle polynomiale

Théorème 2.1 *Supposons que les fonctions f_i, $i = 1,\dots,m$ sont à croissance polynômiale et satisfont la condition (2.4), Soit $(u_1(t,.),u_2(t,.),\dots,u_m(t,.))$ une solution positive de $(2.1),(2.2)$ et (2.3), on introduit la fonctionnelle*

$$L(t) = \int_\Omega H_{p_m}(u_1(t,x),u_2(t,x),\dots,u_m(t,x))dx \tag{2.8}$$

où

$$H_{p_m}(u_1,u_2,\dots,u_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m}\dots\sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}}\dots C_{p_2}^{p_1}\theta_1^{p_1^2}\dots\theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2}u_1^{p_1}u_2^{p_2-p_1}\dots u_m^{p_m-p_{m-1}} \tag{2.9}$$

avec p_m un entier positif et $C_{p_j}^{p_i} = \frac{p_j!}{p_i!(p_j-p_i)!}$. Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T^*]$, $T^*<T_{\max}$.

Lemme 2.1 *Soit H_{p_m} le polynôme homogène défini par (2.9). Alors*

$$\begin{aligned}\partial_{u_1}H_{p_m} = p_m\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1}\dots\sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}}\dots C_{p_2}^{p_1}\theta_1^{(p_1+1)^2}\dots\theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2}\\ \times u_1^{p_1}u_2^{p_2-p_1}u_3^{p_3-p_2}\dots u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}},\ \forall i = 2,\dots,m-1.\end{aligned} \tag{2.10}$$

$\forall i = 2,\dots,m-1$:

$$\begin{aligned}\partial_{u_i}H_{p_m} &= p_m\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1}\dots\sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}}\dots C_{p_m-1}^{p_{m-1}}\dots C_{p_2}^{p_1}\theta_1^{p_1^2}\dots\theta_{i-1}^{p_{(i-1)}^2}\theta_i^{(p_i+1)^2}\dots\theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2}\\ &\times u_1^{p_1}u_2^{p_2-p_1}u_3^{p_3-p_2}\dots u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

et

$$\begin{aligned}\partial u_m H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m*1}} ... C_{p_3}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} ... \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} u_3^{p_3-p_2} ... u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve. Dérivons H_{p_m} par rapport à u_1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_{u_1} H_{p_m} &= \sum_{p_{m-1}=1}^{p_m} ... \sum_{p_2=1}^{p_3} \sum_{p_1=1}^{p_2} p_1 C_{p_m}^{p_{m-1}} ... C_{p_3}^{p_2} C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} ... \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\times u_1^{p_1-1} u_2^{p_2-p_1} u_3^{p_3-p_2} ... u_m^{p_m-p_{m-1}}. \end{aligned}$$

Utilisons le fait que

$$p_i C_{p_{i+1}}^{p_i} = p_{i+1} C_{p_{i+1}-1}^{p_i-1} \tag{A.1}$$

pour $i = 1, ..., m-1$, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_{u_1} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=1}^{p_m} ... \sum_{p_2=1}^{p_3} \sum_{p_1=1}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}-1} ... C_{p_3-1}^{p_2-1} C_{p_2-1}^{p_1-1} \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} ... \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\times u_1^{p_1-1} u_2^{p_2-p_1} u_3^{p_3-p_2} ... u_m^{p_m-p_{m-1}} \end{aligned}$$

quand on change dans les sommes les indices $p_i - 1$ par p_i pour tout $i = 1, ..., m-1$, on déduit (2.10).
Pour la formule (2.11) et (2.12) dérivons H_{p_m} par rapport à u_i, $\forall i = 2, ..., m$, donne

$$\begin{aligned}\partial_{u_i} H_{p_m} &= \sum_{p_{m-1}=1}^{p_m} ... \sum_{p_i=1}^{p_{i+1}} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} (p_i - p_{i-1}) C_{p_m}^{p_{m-1}} ... C_{p_i}^{p_{i-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} ... \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_i^{p_i-p_{i-1}-1} ... u_m^{p_m-p_{m-1}} \end{aligned}$$

prenons en compte

$$C_{p_i}^{p_{i-1}} = C_{p_i}^{p_i-p_{i-1}}, \ p_{i-1} = 0, ..., p_i - 1 \text{ et } p_i = 1, ..., p_{i+1} \tag{A.2}$$

utilisons $(A.1)$ et changeons l'indice $p_i - 1$ par p_i, $\forall i = 1, ..., m-1$, on obtient (2.11) et (2.12)

Lemme 2.2 *Les dérivées partielles secondes de H_{p_m} sont données par*

$$\begin{aligned}\partial_{u_1^2} H_{p_m} &= p_m(p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} ... \sum_{p_2=0}^{p_3} \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{(p_1+2)^2} ... \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &\times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_m^{(p_m-2)-p_{m-1}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$\forall i = 2, ..., m-1$:

$$\begin{aligned}\partial_{u_i^2} H_{p_m} &= p_m(p_m-1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} \theta_2^{p_2^2} ... \theta_{i-1}^{p_{i-1}^2} \theta_i^{(p_i+2)^2} ... \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_m^{(p_m-2)-p_{m-1}}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$\forall 2 \leq i < j \leq m$:

$$\begin{aligned}\partial_{u_i u_j} H_{p_m} &= p_m(p_m-1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} ... \theta_{i-1}^{p_{i-1}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} ... \theta_{j-1}^{(p_{j-1}+1)^2} \theta_j^{(p_j+2)^2} ... \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_m^{(p_m-2)-p_{m-1}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

finalement

$$\begin{aligned}\partial_{u_m^2} H_{p_m} &= p_m(p_m-1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-2} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} ... \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_m^{(p_m-2)-p_{m-1}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Preuve. *Dérivons $\partial_{u_i} H_{p_m}$, donnée par la formule (2.10) par rapport à u_1 on obtient*

$$\begin{aligned}\partial_{u_1^2} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=1}^{p_m-1} ... \sum_{p_1=1}^{p_2} p_1 C_{p_m-1}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{(p_1+1)^2} ... \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1-1} u_2^{p_2-p_1} ... u_m^{(p_m+1)-p_{m-1}} \end{aligned}$$

Utilisons $(A.1)$, et quand on change les indices $p_i - 1$ par p_i, $\forall i = 1, ..., m-1$:

$$\begin{aligned}\partial_{u_i^2} H_{p_m} &= p_m \sum_{p_{m-1}=1}^{p_{i+1}} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} (p_i - p_{i-1}) C_{p_m-1}^{p_{m-1}} ... C_{pi}^{pi-1} ... C_{p_2}^{p_1} \\ &\quad \times \theta_1^{p_1^2} ... \theta_{i-1}^{p_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p_i+1)^2} ... \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_i^{p_i-p_{i-1}-1} ... u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}}. \end{aligned}$$

Utilisons $(A.2)$ et $(A.1)$, on obtient (2.15).
Dérivons $\partial_{u_i} H_{p_m}$ donnée par la formule (2.11) par rapport à u_j, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_{u_j u_i} H_{p_m} &= \partial_{u_j}(\partial_{u_i} H_{p_m}) = p_m \sum_{p_{m-1}=1}^{p_m-1} ... \sum_{p_i=1}^{p_{i+1}} ... \sum_{p_j=1}^{p_{j+1}} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} (p_j - p_{j-1}) C_{p_m-1}^{p_{m-1}} ... C_{p_i}^{p_{i-1}} ... C_{p_j}^{p_{j-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \\ &\quad \times \theta_1^{p_1^2} ... \theta_j^{p_j^2} ... \theta_i^{(p_i+1)^2} ... \theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+1)^2} \\ &\quad \times u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} ... u_j^{p_j-p_{j-1}-1} ... u_i^{p_i-p_{i-1}} ... u_m^{(p_m-1)-p_{m-1}}, \end{aligned}$$

$\forall i = 2, ..., m-1.$

En appliquant successivement $(A.2), (A.1)$ *et* $(A.2)$ *une deuxiéme fois, nous en déduisons* (2.16).
Finalement, en dérivons $\partial_{u_m} H_{p_m}$ *par rapport à* u_m, *et appliquons successivement* $(A.2)$, $(A.1)$ *et* $(A.2)$ *une deuxiéme fois, on deduit* (2.17) .

Lemme 2.3 *Soit* A *une matrice carrée symétrique d'ordre m définie par* $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, *alors on obtient cette propriété*

$$\begin{cases} K_m^m = \det m. \prod_{k=1}^{k=m-2} (\det k)^{2^{(m-k-2)}}, \ m > 2 \\ K_2^2 = \det 2, \end{cases} \tag{2.17}$$

ou

$$K_m^l = K_{l-1}^{l-1}.K_m^{l-1} - (H_m^{l-1})^2, \ \ l = 3, ..., m, \tag{2.17a}$$

$$H_m^l = \det_{1 \le i,j \le m} \left((a_{ij})_{\substack{i \ne m,...,l+1 \\ j \ne m-1,...,l}} \right) . \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det k)^{2^{(l-k-2)}}, \ \ l = 3, ..., m-1, \tag{2.17b}$$

$$K_m^2 = a_{11}a_{mm} - (a_{1m})^2, \tag{2.17c}$$

$$H_m^2 = a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m}, \tag{2.17d}$$

Preuve. *On démontre ce lemme par récurrence.* ■
si $m = 2$,..., $K_2^2 = \det 2$.
si $m = 3$, *En utilisant la condensation de Dodgson bien connue qui a été modifiéé* [21] *sur la matrice symétrique d'ordre 3*

$$\det 1 \det 3 = \det 2 \det_{1 \le i,j \le 3} \left[(a_{i,j})_{\substack{i \ne 2 \\ j \ne 2}} \right] - \left[\det_{1 \le i,j \le 3} \left[(a_{i,j})_{\substack{i \ne 3 \\ j \ne 2}} \right] \right] \tag{A.3}$$

sinon

$$\det 2 = K_2^2, \ \ \det_{1 \le i,j \le 3} \left[(a_{i,j})_{\substack{i \ne 2 \\ j \ne 2}} \right] = a_{11}a_{33} - (a_{13})^2 = K_3^2$$

et

$$\det_{1 \le i,j \le 3} \left[(a_{i,j})_{\substack{i \ne 3 \\ j \ne 2}} \right] = a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} = H_3^2.$$

La formule $(A.3)$ *sera*

$$\det 1 \det 3 = K_2^2.K_3^2 - \left[H_3^2 \right]^2 .$$

Ainsi, en utilisant la formule $(2.17a)$, *la formule* (2.17) *sera vérifiée pour* $m = 3$.
Lorsque $m \ge 4$, *on suppose que la formule* (2.17) *est vraie pour* $m-1, m-2, m-3, ..., 4$ *et nous le prouvons pour* m.

Il suffit de prouver que :

$$K_m^{m-1} = \det_{1\leq i,j\leq 3}\left[(a_{i,j})_{\substack{i\neq m-1\\ j\neq m-1}}\right].\prod_{k=1}^{m-3}(\det k)^{2^{(m-k-3)}}. \tag{A.4}$$

En mettant $l = m-1$ *dans la formule* $(2.17b)$*, on obtient*

$$H_m^{m-1} = \det_{1\leq i,j\leq 3}\left[(a_{i,j})_{\substack{i\neq m\\ j\neq m-1}}\right].\prod_{k=1}^{m-3}(\det k)^{2^{(m-k-3)}} \tag{A.5}$$

A partir de la preuve par récurrence, on a :

$$K_{(m-1)}^{(m-1)} = \det(m-1).\prod_{k=1}^{m-3}(\det k)^{2^{(m-k-3)}}. \tag{A.6}$$

En mettant $l = m$ *dans la formule* $(2.17a)$*, on obtient*

$$K_m^m = K_{(m-1)}^{(m-1)}.K_m^{m-1} - (H_m^{m-1})^2, \tag{A.7}$$

En remplaçant $(A.4), (A.5)$ *et* $(A.6)$ *dans* $(A.7)$*, on obtient*

$$\begin{aligned} K_m^m &= \prod_{k=1}^{m-3}(\det k)^{2^{(m-k-2)}}.\det(m-2).\det m \\ &= \det m.\prod_{k=1}^{m-2}(\det k)^{2^{(m-k-2)}} \end{aligned}$$

et donc la formule (2.17) *et vrai pour* m *.* ■

Preuve. ***[du théorème*** (2.1)***]*** *Dérivons* $L(t)$ *par rapport à* t*, on obtient* ■

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_\Omega \partial_t H_{p_m} dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m}(a_i \triangle u_i + f_i) dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m a_i \partial_{u_i} H_{p_m} \triangle u_i dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} H_{p_m} f_i dx \\ &= I + J \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$I = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} a_i \partial_{u_i} H_{p_m} \triangle u_i dx$$

$$J = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \partial_{u_i} H_{p_m} f_i dx$$

En appliquant la formule de Green à la première intégrale, on obtient $I = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{m} a_i \partial_{u_i} H_{p_m} \partial_\eta u_i ds$$

$$I_2 = -\int_\Omega \left[\left((\frac{a_i + a_j}{2} \partial_{u_j u_i} H_{p_m})_{1 \le i,j \le m} \right) T \right] . T dx$$

$\forall p_1 = 0, ..., p_2,\ p_2 = 0, ..., p_3, ..., p_{m-1} = 0, ..., p_m - 2$ et $T = (\nabla u_1, \nabla u_2, ..., \nabla u_m)^t$.

Appliquant les lemmes 1 et 2, on obtient

$$(\frac{a_i + a_j}{2} \partial_{u_j u_i} H_{p_m})_{1 \le i,j \le m} = p_m(p_m - 1) \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m - 2} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \left((a_{ij})_{1 \le i,j \le m} \right) u_1^{p_1} u_2^{p_2 - p_1} ... u_m^{(p_m-2)-p_{m-1}} \tag{2.19}$$

où $(a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ et un matrice défini sur (2.7).

On démontre qu'il existe une constante positive C_4indépendant de $t \in [0, T_{\max}[$ telle que

$$I_1 \le C_4 \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}[\tag{2.20}$$

et cela

$$I_2 \le 0 \tag{2.21}$$

pour certaines conditions aux bords :

(i) Si $i = 1, ..., m$: $0 < \lambda_i < 1$, utilisant la condition aux bords (2.2) on obtient

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{m} a_i \partial_{U_i} H_{P_m} (\gamma_1 - \alpha_i u_i) ds,$$

Où $\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_i}$ et $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{1 - \lambda_i}$, $i = 1, 2, ..., m$.

puisque $H(U) = \sum_{i=1}^{m} a_i \partial_{u_i} H_{P_m} (\gamma_i - \alpha_i u_i) = P_{n-1}(U) - Q_n(U)$, où P_{n-1} et Q_n sont des polynômes avec des coefficients positifs et de degré $n - 1$ et n respectivement et puisque la solution est positive, alors

$$\limsup_{(|u_1|+|u_2|+...+|u_m|) \longrightarrow \infty} H(U) = -\infty \tag{2.22}$$

ce qui prouve que H est uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+^m$ et par conséquent (2.20)
(ii) Si $\forall i = 1, ..., m : \lambda_i = 0$, then $I_1 = 0$ on $[0, T_{\max}[$.
(iii) Le cas de la condition homogène de Dirichlet est trivial, puisque dans ce cas la positivité de la solution sur $[0, T_{\max}[\times\Omega$ implique $\partial_\eta u_i \leq 0$, $\forall i = 1, .., m$, sur $[0, T_{\max}[\times\partial\Omega$. Par conséquent on obtient encore (2.20) avec $C_2 = 0$.
(iv) Si un ou deux ou trois$\cdots$(m-1) de composants de la solution satisfont aux conditions aux bords sont homogènes de Dirichlet et d'autres sont nonhomogènes de Robin, par exemple, $u_1 = 0, \lambda_i u_i + (1-\lambda)\partial_\eta u_i = \beta_i$ pour $i = 2, .., m$, sur$[0, T_{\max}[\times\partial\Omega$,avec $0 \leq \lambda_i \leq 1, \beta_i \geq 0$ pour $i = 2, .., m$ .Alors, suivant le même raisonnement nous obtenons

$$\limsup_{(|u_2|+...+|u_m|)\longrightarrow\infty} H(0, u_2, ..., u_m) = -\infty \tag{2.23}$$

Puis (2.20)
Maintenant, nous prouvons(2.21) .
$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ est une matrice définie sur (2.7).
Les formes quadratiques (par rapport à ∇u_i, $i = 1, ..., m$) associées aux matrices $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, $p_1 = 0, ..., p_2, p_2 = 0, ..., p_3, ..., p_{m-1} = 0, ..., p_m - 2$ sont positives puisque leurs déterminants principaux $\det 1, \det 2, ..., \det m$ sont également positifs. Pour voir cela, nous avons les éléments suivants :
(*) $\det 1 = a_1\theta_1^{(p_1+2^2)}\theta_2^{(p_2+2)^2}...\theta_{(m-1)}^{(p_{(m-1)}+2)^2} > 0$ *pour* $p_1 = 0, ..., p_2, p_2 = 0, ..., p_3 ... p_{m-1} = 0, ..., p_{m-2}$.
(**)Selon le lemme 3, on obtient

$$\det 2 = K_2^2 = a_1 a_2 \theta_1^{2(p_1+1)^2} \prod_{k=2}^{m-1} \theta_k^{2(p_k+2)^2} \left[\theta_1^2 - A_{12}^2\right],$$

en utilisent (2.6) pour $l = 2$ on obtient

$$\det 2 > 0.$$

(***) Selon le lemme 3, on obtient

$$K_3^3 = \det 3 \det 1$$

mais $\det 1 > 0$, donc $sign(K_3^3) = sign(\det 3)$
En utilisent (2.6) tq $l = 3$ on obtient

$$\det 3 > 0$$

(****) On suppose $\det k > 0$, $k = 1, 2, ..., l-1$ et prouver $\det l > 0$

$$\det k > 0, k = 1, 2, ..., (l-1) \Rightarrow \prod_{k=1}^{l-2} (\det k)^{2^{(l-k-2)}} > 0 \tag{*}$$

par lemme 3 $K_l^l = \det l.\prod_{k=1}^{l-2}(\det k)^{2^{(l-k-2)}}$, et par $(*)$, on obtient $sign(K_l^l) = sign(\det l)$ tq $K_l^l > 0$, par (2.6),on à $\det l > 0$.on obtient $I_2 \leq 0$. ■

Maintenant on montre que J est bornée (2.18)

Concernant le terme J, nous substituons les expressions des dérivées partielles données par le lemme (2.1) dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
J &= \int_\Omega \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2} f_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{p_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2} f_j + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2} f_m \right) dx \\
&= \int_\Omega \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
&\quad \times \left(\frac{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2}}{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2}} f_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \frac{\prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{p_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(p_i+1)^2}}{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2}} f_j + f_m \right) \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2} dx \\
&= \int_\Omega \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \right] \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{\theta_i^{(p_i+1)^2}}{\theta_i^{p_i^2}} f_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \prod_{i=j}^{m-1} \frac{\theta_i^{(p_i+1)^2}}{\theta_i^{p_i^2}} f_j + f_m \right) \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{p_i^2} dx
\end{aligned}$$

Utilisons la condition (2.4), il résulte que :

$$J \leq C_5 \int_\Omega \left[\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i \right) \right] dx$$

Pour prouver que la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle$[0, T^*]$, on écrit d'abord :

$$\begin{aligned}
&\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} u_1^{p_1} u_2^{p_2-p_1} \dots u_m^{p_m-1-p_{m-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i \right) \\
&= R_{p_m}(U) + S_{p_m-1}(U)
\end{aligned}$$

Où $R_{p_m}(U)$ et $S_{p_m-1}(U)$ sont deux polynômes homogènes de degré p_m et p_{m-1}, respectivement.

Tout d'abord, puisque les polynômes H_{p_m} et R_{p_m} sont tous de degré p_m, il existe un Constante positive C_6 telle que

$$\int_\Omega R_{p_m}(U)\,dx \leq C_6 \int_\Omega H_{p_m}(U)\,dx \tag{2.24}$$

Puis en appliquant l'inégalité de Hölder à l'intégrale $\int_\Omega S_{p_m-1}(U)\,dx$ pour le majorer, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega S_{p_m-1}(U)\,dx &= \int_\Omega 1.S_{p_m-1}(U)\,dx \\ &\leq \left[\int_\Omega 1dx\right]^{\frac{1}{p_m}} \left[\int_\Omega (S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}}\,dx\right]^{\frac{p_m-1}{p_m}}\end{aligned}$$

Pour tout $u_1, u_2, ..., u_{m-1} \geq 0$ et $u_m > 0$,

$$\frac{(S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(U)} = \frac{(S_{p_m-1}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1)},$$

où $\forall i \in [1, 2, ..., m-1] : x_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$

$$\lim_{x_i \to +\infty} \frac{(S_{p_m-1}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1)} < +\infty$$

Alors il existe une constante positive C_7 telle que

$$\frac{(S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}}}{H_{p_m}(U)} \leq C_7 \qquad \text{pour tout } u_1, u_2, ..., u_{m-1}, u_m \geq 0. \tag{2.25}$$

Alors

$$(S_{p_m-1}(U))^{\frac{p_m}{p_m-1}} \leq C_7 H_{p_m}(U)$$

Par conséquent, la fonctionnelle L satisfait l'inégalité différentielle :

$$L'(t) \leq C_8 L(t) + C_9 L^{\frac{p_m}{p_m-1}}(t),$$

C_8, C_9 deux constantes positives, posons

$$Z = L^{\frac{1}{p_m}}$$

On obtient :

$$p_m Z' \leq C_8 Z + C_9$$

La solution de cette inégalité différentielle est majorée par la formule

$$Z(t) \leq \left(Z(0) + \frac{C_9}{C_8}\right) e^{\frac{C_8}{n}} - \frac{C_9}{C_8}$$

Ainsi, la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, ce qui termine la preuve du théorème (2.1).

2.2 Existence globale

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du théorème* (2.1)*, toutes les solutions du système* (2.1)- (2.3) *avec les conditions initiales positives dans* $L^{\infty}(\Omega)$ *sont dans* $L^{\infty}(0,T^{*},L^{p}(\Omega))$ *Pour certains* $p \geq 1$.

Preuve. Supposons d'abord $p \in N^{*}$, il est évident que :

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{m}u_{i}(t,x)\right)^{p}dx \leq L(t) \quad sur \ [0,T^{*}]$$

et comme $L(t)$ est bornée, alors il existe une constante C_{10} telle que

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{m}u_{i}(t,x)\right)^{p}dx \leq C_{10} \quad sur \ [0,T^{*}]$$

ce qui implique $u_{i}(t,x) \in L^{\infty}(0,T^{*},L^{p}(\Omega))$ Pour certains $p \geq 1$. ■

Proposition 2.1 *Sous les hypothèses du théorème* (2.1)*et la condition* (2.5) *toutes Les solutions du système* (2.1) - (2.3) *avec des données initiales positives dans* $L^{\infty}(\Omega)$ *sont globales pour certains* $p > \frac{N_{n}}{2}$.

Preuve. Soit $p > \frac{N_{n}}{2}$d'après (Théorème (2.2)) il existe une constante C_{11} telle que

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{m}u_{i}(t,x)+1\right)^{Np}dx \leq C_{11} \quad sur \ [0,T_{\max}[\tag{2.26}$$

et grâce à la condition (2.3), il s'ensuit que

$$\int_{\Omega}|f_{1}(u_{i})|^{p}\,dx \leq C_{12}$$

par conséquent

$$f_{1}(u_{1}(t,.),u_{2}(t,.),...,u_{m}(t,.)) \in L^{\infty}(0,T^{*},L^{p}(\Omega))$$

De façon analogue, utilisant les formules (2.3),(2.4) et $((2.26))$, on obtient

$$f_{1}(u_{1}(t,.),u_{2}(t,.),...,u_{n}(t,.)),,...,f_{m}(u_{1}(t,.),u_{2}(t,.),...,u_{n}(t,.)) \in L^{\infty}(0,T^{*},L^{p}(\Omega))$$

D'autre part, d'après (2,3) on a

$$|f_{1}(U)|^{\frac{p}{N}},|f_{2}(U)|^{\frac{p}{N}},...,|f_{m}(U)|^{\frac{p}{N}} \leq C_{12}(U)\left(\sum_{i=1}^{m}u_{i}(t,x)+1\right)^{p} \quad sur \ [0,T_{\max}[\times\Omega \tag{2.27}$$

Comme $u_{1},u_{2},...,u_{m}$ sont dans $L^{\infty}(0,T^{*},L^{p}(\Omega))$ et $\frac{p}{N} > \frac{n}{2}$ alors la solution du système (2.1) vérifiant les conditions initiales (2.3) et aux limites (2.2), existe globalement. ■

2.3 Exemple

Nous examinerons un exemple particulier de modèle biochimique .
Pour illustrer l'applicabilité du corollaire(2.1) et de la proposition (2.1), nous supposons que toutes les réactions ont lieu dans un domaine borné avec une frontière lisse ∂
Commençons par la réaction suivante :

$$U_1 + U_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} U_3, U_1 + U_4 \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} U_5, U_2 + U_6 \underset{k_6}{\overset{k_5}{\rightleftarrows}} U_4 \tag{2.28}$$

Cela conduit au système de réaction-diffusion à six composants :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1\Delta u_1 &= -k_1u_1u_2 - k_3u_1u_4 + k_2u_3 + k_4u_5.\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2\Delta u_2 &= -k_1u_1u_2 - k_5u_2u_6 + k_2u_3 + k_6u_4.\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} - a_3\Delta u_3 &= k_1u_1u_2 + k_5u_2u_6 - k_2u_3 - k_6u_4.\\
\frac{\partial u_4}{\partial t} - a_4\Delta u_4 &= -k_3u_1u_4 + k_5u_2u_6 + k_4u_5 - k_6k_4.\\
\frac{\partial u_5}{\partial t} - a_5\Delta u_5 &= k_3u_1u_4 - k_5u_2u_6 - k_4u_5 + k_6k_4.\\
\frac{\partial u_6}{\partial t} - a_6\Delta u_6 &= -k_5u_2u_6 + k_6k_4.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dans le cas particulier $k_5 = k_6 = 0$, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 peuvent représenter l'hémoglobine Hb, O_2, HbO_2, CO_2 et $HbCO_2$. Hollis [16] établit une existence globale à condition que
1) u_3 satisfait le même type de conditions aux limites que u_1 ou u_2
2)u_5 satisfait le même type de condition aux limites que u_1 ou u_4.

Proposition 2.2 *les solutions du système (2.29) avec conditions initiales uniformement bornées non-négative et les conditions aux bords (2.2), existent globalement.*

Preuve. La condition (2.5) est satifaite pour les six équations de système en choisissant $D_3 < D_2$ et $0 < D_5 - D_4 < D_1$: Alors le théoréme (2.1) implique que u_1, u_2,u_3, u_4, u_5 et u_6 sont dans $L^\infty(0, T, L^N(\Omega))$ pourtous $N \geq 1$.
Alors (2.29) existent globalement. ■

Chapitre 3

Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion pleine $m \times m$

Nous nous intéresserons dans ce chapitre l'existence globale des solutions d'un système de réaction diffusion à matrice de diffusion pleine sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - A\Delta u_i = f_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad \text{dans} \quad R^+ \times \Omega \tag{3.1}$$

Avec les conditions aux bords :

$$\lambda u_i + (1-\lambda)\frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \beta_i \qquad dans\ R^+ \times \partial\Omega \tag{3.2}$$

et les conditions initiales :

$$u_i(0,x) = u_i^0(x) \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.3}$$

(i) Pour les conditions aux bords nonhomogènes de Robin, on utilise
$0 < \lambda < 1$, et $\beta_i \in R$. $i = 1, .., m$.

(ii) Pour les conditions aux bords homogènes de Neumann, on utilise
$\lambda = \beta_i = 0, \quad i = 1, .., m$.

(iii) Pour les conditions aux bord homogènes de Dirichlet, on utilise
$1 - \lambda = \beta_i = 0\ , \quad i = 1, .., m$

Où Ω est un domaine borné ouvert de classe C^1 dans R^n, avec $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale vers l'extérieur sur $\partial\Omega, \{A = (a_{ij})_{i.j=1,..,m}\}$ est la matrice de diffusion

$$A = (a_{ij})_{i.j=1,..,m} \qquad \text{avec } a_{ij} = \begin{cases} a & \text{Si } i = j \\ b & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

a, b sont des constantes positives satisfaisant la condition $a^2 - b^2 \geq 0$ qui reflète la parabolicité du système et implique en même temps que la matrice de diffusion A est définie positive, C'est-à-dire que les valeurs propres sont positives.
Les données initiales sont supposées être non negatives et dans la région suivante :

$$\sum = \{(u_1^0, u_2^0, .., u_m^0) \in R^n : \begin{cases} u_2^0, u_3^0, ..., u_{m-1}^0 \geq u_1^0 \\ \text{et} \\ u_1^0 + u_2^0 + \cdots + u_m^0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{quand} \quad \begin{cases} \beta_2, \beta_3, ..., \beta_{m-1} \geq \beta_1 \\ \text{et} \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m \geq 0 \end{cases}$$

Nous supposons que les termes de la réaction $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sont continûment différentiables, polynomialement bornés sur $\sum$ satisfaisant

$$\begin{cases} \forall i = 1, ..., m-1 \\ -f_1(u_{i+1}, u_2, u_{3.}, ..., u_m) + f_{i+1}(u_{i+1}, u_2, u_3, ..., u_m) \geq 0, \\ (f_1 + \cdots + f_m)(-(u_2 + \cdots + u_m), u_2, u_3, \ldots, u_m) \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

et vérifient

$$\sum_{i=1}^{m-1} D_i f_i(u_1, u_2, \cdots, u_m) + f_m(u_1, u_2, \cdots, u_m) \leq C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) \tag{3.5}$$

pour tout $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$, et C_1 est la fonction positive et uniformément bornée définie sur R_+^m.
Le système (3.1) peut être réécrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \ldots, u_m) \\ f_2(u_1, \ldots, u_m) \\ \vdots \\ f_m(u_1, \ldots, u_m) \end{pmatrix} \quad \text{dans } R^+ \times \Omega$$

$A = (a_{ij})_{i.j=1,..,m}$ est la matrice de diffusion

$$A = (a_{ij})_{i.j=1,..,m} \quad \text{avec } a_{ij} = \begin{cases} a & \text{if } i = j \\ b & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

3.1 Construction d'une région invariante :

L'existence locale et l'unicité des solutions au problème de la valeur initiale (3,1), $(3,5)$ à partir de la théorie de l'existence de base pour les équations différentielles semi-linéaires abstraites.
Les solutions sont classiques sur $[0, T_{\max}[$
Dans ce section, notre objectif est de prouver que la région $\sum$ citée au-dessus est invariante.
Introduisons le système diagonal :

$$\begin{cases} \forall i = 1, ..., m, \\ \partial_t U_i - d_i \Delta U_i \ = F_i(U_1, ..., U_m) \quad \text{sur } [0, T[\times\Omega \\ \text{Avec les conditions aux bords} \\ \alpha_i \dfrac{\partial U_i}{\partial \eta} + (1 - \alpha_i) U_i = \beta_i \quad \text{sur } [0, T[\times\partial\Omega \\ \text{Et les donnée initiales} \\ U_i(0, .) = U_i^0, \qquad\qquad \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Où $F_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 de $(U_1, ..., U_m)$ et pour tout $i = 1, ..., m$; $d_i > 0$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $\beta_i \geq 0$. Supposons que les fonctions $(F_i)_{i=1,...,m}$ sont quasi-positives, ce qui signifie que

$$\forall U_1, U_2, ..., U_m \geq 0, \ F_1(0, U_2 ..., U_m), F_2(U_1, 0, U_3, ..., U_m), ..., F_m(U_1, ..., U_{m-1}, 0) \geq 0$$

Lemme 3.1 *Si les fonctions $(F_i)_{i=1,...,m}$ sont quasi-positives, alors*

$$U_1^0(x), ..., U_m^0(x) \geq 0 \Longrightarrow U_1(t, x), ..., U_m(t, x) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0, T^*[$$

Preuve. Voire D.Henry[15,pg.13] ■

Proposition 3.1 *Supposons que les fonctions $f_1, ..., f_m$ pointe dans la région $\sum$ sur $\partial\sum$, sous (3.4) la région est invariante*

Preuve. Le système (3.1), (3.2),(3.3) peut recopier sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \dots, u_m) \\ f_2(u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_m(u_1, \dots, u_m) \end{pmatrix} \quad \text{dans } R^+ \times \Omega$$

La matrice de diffusion A est pleine

$$\begin{cases} \lambda_i = a - b \quad i = 1...m - 1 \\ \lambda_m = a + (m - 1)b \end{cases}$$

sont les valeur propre de A^t, et

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_{m-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont les vecteurs propres de la matrice A^t $(A^t = A)$ associés à la valeur propre multiple $\lambda_1 = a - b$ et

$$v_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_m = (1, 1, ..., 1)^t$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_m = a + (m-1)b$.
On va transformer le système (3.1), (3.2), (3.3) à un système dont la matrice de diffusion est diagonale, pour cela
En multipliant les équations (3.1) du système de réaction diffusion donné par les coordonnées v_1, v_2, ..., v_m respectivement, et en additionnant les équations résultantes, on obtient. ■

$$\begin{cases} \forall i = 1, ..., m-1 \\ \\ \dfrac{\partial U_i}{\partial t} - (a-b)\,\Delta U_i \quad = \; F_i(U_1, \ldots, U_m) \qquad \text{dans }]0, T^*[\times \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \\ \dfrac{\partial U_m}{\partial t} - (a + (m-1)b)\,\Delta U_m = F_m(U_1, \ldots, U_m) \end{cases} \tag{3.6}$$

Avec les conditions aux limites

$$\lambda U_i + (1-\lambda)\frac{\partial U_i}{\partial \eta} = \rho_i \qquad \text{dans }]0, T^*[\times \partial\Omega, \text{ et } i = 1, \ldots, m, \tag{3.7}$$

Et les conditions initiales

$$U_i(0, x) = U_i^0(x) \qquad \text{dans } \Omega, \text{ et } i = 1, \ldots, m, \tag{3.8}$$

où

$$\begin{cases} \forall i = 1, ..., m-1 \\ \\ U_i(t,x) = (-u_1 + u_{i+1})(t,x) \\ \text{et} \\ U_m(t,x) = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m)(t,x) \end{cases} \tag{3.9}$$

pour tout (t,x) sur $]0,T^*[\times \Omega$,et

$$\begin{cases} \forall i = 1, ..., m-1, \\ \\ F_i(U_1, \ldots, U_m) = (-f_1 + f_{i+1})(u_2, u_2, u_3, .., u_m) \\ \text{et} \\ F_m(U_1, \ldots, U_m) = (f_1 + f_2 + \cdots + f_m)(u_2, u_2, u_3, .., u_m) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \forall i = 1, ..., m-1, \\ \\ \rho_i = -\beta_1 + \beta_{i+1} \\ \text{et} \\ \rho_m = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m \end{cases}$$

Pour prouver que (u_i) reste dans Σ, il suffit de prouver que la région

$$\Sigma = \{U_1 \geq 0, U_2 \geq 0, ..., U_m \geq 0\} = R^+ \times R^+ \times ... \times R^+,$$

est un invariant pour le système (3.6).
Etant donné que, à partir de (3.4) nous avons $F_1(0, U_2, U_3, ..., U_m) \geq 0$
il suffit d'être $(-f_1 + f_2)(u_2, u_2, u_3, .., u_m) \geq 0$, pour tout $U_2, ..., U_m \geq 0$ et tout $u_2, u_3, .., u_m \geq 0$, alors $U_1(t,x) \geq 0$ pour tout (t,x) dans $]0,T^*[\times\Omega$, , grâce à la méthode de la région invariante (voir Smoller [34]), et parce que $F_2(U_1, 0, U_3, ..., U_m) \geq 0$ il suffit $(-f_1 + f_3)(u_2, u_2, u_3, .., u_m) \geq 0$, pour tout $U_1, U_3, ..., U_m \geq 0$ et tout $u_2, u_3, .., u_m \geq 0$, alors $U_2(t,x) \geq 0$,et successivement nous avons au dernier $F_m(U_1, U_2, , ..., U_{m-1}, 0) \geq 0$ Il suffit d'être $(f_1 + f_2 + \ldots + f_m)(u_2, u_2, u_3, .., u_m) \geq 0$, pour tout $U_1, U_2, U_3, ..., U_{m-1} \geq 0$ et tout $u_2, u_3, .., u_m \geq 0$, alors $U_m(t,x) \geq 0$ pour tout (t,x) dans $]0,T^*[\times \Omega$, alors $\sum$ est une région invariante pour le système (3.1).

3.2 Existence globale

Comme le déterminant du système algébrique linéaire (3.9) par rapport aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, est différent de zéro, alors pour prouver l'existence globale des solutions du problème (3,1)-

(3,5)(dépend de u_i dont la matrice de diffusion est pleine),il suffit de le prouver pour le système (3,6) - (3,7) - (3,8)(dépend de U_i dont la matrice de diffusion est diagonale).
D'après (Théorème de l'effet régularisant), pour démontrer l'existence globale des solution d'un système de réaction diffusion, il suffit de monter que les termes de réactions sont dans $L^{\infty}(0,T,L^{p}(\Omega))$ pour un certain $p > \frac{n}{2}(c - \grave{a} - d)$ il suffit de déduire une estimation uniforme de $\|F_1(U_1,U_2,\ldots,U_m)\|_p$,$\|F_2(U_1,U_2,\ldots,U_m)\|_p,\ldots,\|F_2(U_1,U_2,\ldots,U_m)\|_p$ sur $[0,T^*[$ pour $p > \frac{n}{2}$ $(n = \dim\Omega)$.
La méthode suivie pour appliquer ce théorème, est basée sur la construction d'une fonctionnelle de lyapunov

$$L(t) = \int_{\Omega} H_{p_m}(U_1(t,.),U_2(t,.),...,U_m(t,.))\,dx$$

Soient $A_{ij} = \dfrac{\lambda_i + \lambda_j}{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}$ pour tout $i,j = 1,...,m$. Soient θ_i ,$i = 1,...,m-1$ des constantes positives telles que

$$K_l^l > 0; \qquad l = 2,...,m \tag{3.11}$$

où

$$\begin{cases} K_l^r = K_{r-1}^{r-1}.K_l^{r-1} - \left[H_l^{r-1}\right]^2, \quad r = 3,..,l, \\ H_l^r = a \underset{1\le i,j\le l}{\det}\left((a_{ij})_{\substack{i\neq l,\ldots,r+1\\ j\neq l-1,\ldots,r}}\right).\prod_{k=1}^{k=r-2}(\det K)^{2(r-k-2)}, \quad r = 3,..,l-1, \\ K_l^2 = \underbrace{\lambda_1\lambda_l\prod_{k=1}^{l-1}\theta_k^{2(p_k+2)^2}.\prod_{k=l}^{m-1}\theta_k^{2(p_k+2)^2}}_{\text{positive value}}.\left[\prod_{k=1}^{l-1}\theta_k^2 - A_{1l}^2\right]. \end{cases}$$

et

$$H_l^2 = \lambda_1\sqrt{\lambda_2\lambda_l}\theta_1^{2(p_1+1)^2}\prod_{k=2}^{l-1}\theta_k^{(p_k+2)^2+(p_k+1)^2}.\prod_{k=l}^{m-1}\theta_k^{2(p_k+2)^2}.\left[\theta_1^2A_{2l} - A_{12}A_{1l}\right].$$

On note par $\underset{1\le i,j\le l}{\det}\left((a_{ij})_{\substack{i\neq l,\ldots,r+1\\ j\neq l-1,\ldots,r}}\right)$ le déterminant de la matrice carrée symétrique d'ordre r obtenue à partir de $(a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ En enlevant le $(r+1)$, $(r+2)$, ..., l lignes et les r , $(r+1)$, ..., (l-1) ème colonnes. Les éléments de la matrice sont

$$a_{ij} = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}\theta_1^{p_1^2}..\theta_{(i-1)}^{p_{(i-1)}^2}\ \theta_i^{(p_i+1)^2}\ ..\theta_{j-1}^{\left(p_{(j-1)}+1\right)^2}\ \theta_j^{(p_j+2)^2}..\theta_{(m-1)}^{\left(p_{(m-1)}+2\right)^2}. \tag{3.12}$$

Theoreme1 : Soit $(U_1(t,.),U_2(t,.),...,U_m(t,.))$ être une solution positive de $(3.6)-(3.7)-(3.8)$, on introduit la fonctionnelle

$$\begin{aligned} L(t) \ = \ & \int_{\Omega}\sum_{p_{m-1}=0}^{p_m}..\sum_{p_1}^{p_2}C_{p_m}^{p_{m-1}}..C_{p_2}^{p_1}\theta_1^{p_1^2}..\theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} \\ & \times U_1^{p_1}U_2^{p_2-p_1}..U_m^{p_m-p_{m-1}}dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$H_{p_m}(U_1,..,U_m) = \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m} .. \sum_{p_1}^{p_2} C_{p_m}^{p_{m-1}} .. C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{p_1^2} .. \theta_{(m-1)}^{p_{(m-1)}^2} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} .. U_m^{p_m-p_{m-1}} \tag{3.14}$$

Avec p_m étant un entier positif et $C_{pj}^{p_i} = \dfrac{P_j!}{P_i!\,(P_j - P_i)!}$.
Alors, la fonction L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, $T^* < T_{\max}$.

Lemme 3.2 *Soit H_{P_m} le polynôme homogène défini par (3.14). Alors*

$$\begin{aligned} \partial_{U_1} H_{P_m} &= p_m \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{(P_1+1)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{\left(P_{(m-1)}+1\right)^2} \\ &\quad \times U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} \dots U_m^{(P_m-1)-P_{m-1}}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

pour tout $i = 2, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} \partial_{U_i} H_{P_m} &= p_m \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} .. C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{P_1^2} .. \theta_{i-1}^{P_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p+1)^2} .. \theta_{(m-1)}^{\left(P_{(m-1)}+1\right)^2} \\ &\quad \times U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} .. U_m^{(P_m-1)-P_{m-1}}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{U_m} H_{P_m} &= p_m \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-1}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{P_1{}^2} \theta_2^{P_2^2} \dots \theta_{(m-1)}^{P_{(m-1)}^2} \\ &\quad \times U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} \dots U_m^{(P_m-1)-P_{m-1}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Lemme 3.3 *Les dérivées partielles secondes de H_{P_m} sont données par*

$$\begin{aligned} \partial_{U_1^2} H_{P_m} &= p_m(p_m-1) \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{(P_1+2)^2} \dots \theta_{(m-1)}^{\left(P_{(m-1)}+2\right)^2} \\ &\quad \times U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} \dots U_m^{(P_m-2)-P_{m-1}}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

pour tout $i = 2, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} \partial_{U_i^2} H_{P_m} &= p_m(p_m-1) \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-2} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} .. C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{P_1^2} .. \theta_{i-1}^{P_{(i-1)}^2} \theta_i^{(p+2)^2} \\ &\quad \times \dots \theta_{(m-1)}^{\left(P_{(m-1)}+2\right)^2} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} .. U_m^{(P_m-2)-P_{m-1}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

pour tout $\leq i < j \leq m$:

$$\begin{aligned}\partial_{U_iU_j} H_{P_m} &= p_m(p_m-1)\sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-2} .. \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} .. C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{P_1^2} .. \theta_{i-1}^{P_{(i-1)}^2} \theta_i^{(P_i+1)^2} .. \theta_{j-1}^{(P_{j-1}+1)^2} \theta_j^{(P_j+2)^2} \\ &\times ... \theta_{(m-1)}^{(P_{(m-1)}+2)^2} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} ... U_m^{(P_m-2)-P_{m-1}}\end{aligned} \tag{3.20}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_{U_m^2} H_{P_m} &= p_m(p_m-1)\sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-2} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \theta_1^{P_1{}^2} \theta_2^{P_2^2} ... \theta_{(m-1)}^{P_{(m-1)}^2} \\ &\times U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} ... U_m^{(P_m-2)-P_{m-1}}\end{aligned} \tag{3.21}$$

Lemme 3.4 *Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre m définie par $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, alors on obtient cette propriété*

$$\begin{cases} K_m^m = \det m. \prod_{k=1}^{k=m-2} (\det K)^{2(m-k-2)}, \quad m > 2 \\ K_2^2 = \det 2, \end{cases} \tag{3.22}$$

où

$$K_m^l = K_{l-1}^{l-1} . K_m^{l-1} - \left(H_m^{l-1}\right)^2, \quad l = 3, ..., m, \tag{3.22a}$$

$$H_m^l = \det_{\substack{1\leq i,j\leq l \\ j\neq m-1,...,l}} \left((a_{ij})_{i\neq m,...,l+1} \right) . \prod_{k=1}^{k=l-2} (\det K)^{2(l-k-2)}, \quad l = 3, .., m-1, \tag{3.22b}$$

$$K_m^2 = a_{11}a_{mm} - (a_{1m})^2, \tag{3.22c}$$

$$H_m^2 = a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m}. \tag{3.22d}$$

Preuve de théorème1 : dérivons L par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_\Omega \partial_t H_{P_m} dx \\ &= \int_\Omega \partial_{U_1} H_{P_m} \frac{\partial U_1}{\partial t} + ... + \partial_{U_m} H_{P_m} \frac{\partial U_m}{\partial t} \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m \partial_{U_i} H_{P_m} (\lambda_i \Delta U_i + F_i) dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_{U_i} H_{P_m} \Delta U_i dx + \int_\Omega \partial_{U_i} H_{P_m} F_i dx \\ &= I + J \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{U_i} H_{P_m} \Delta U_i dx \\ J &= \int_\Omega \partial_{U_i} H_{P_m} F_i dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green , on obtient $I = I_1 + I_2$ où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{U_i} H_{P_m} \partial_\eta U_i d\sigma \tag{3.24}$$

$$I_2 = -\int_\Omega \left[\left(\left(\frac{a_i + a_j}{2} \partial_{U_j U_i} H_{P_m} \right)_{1 \le i,j \le m} \right) T \right] T dx \tag{3.25}$$

pour $p_1 = 0, ..., p_2$; $p_2 = 0, ..., p_3$; .....; $p_{m-1} = 0, ..., p_m - 2$ et $T = (\nabla U_1, \nabla U_2, ..., \nabla U_m)^t$.
Appliquant les lemmes 1 et 2, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_i + a_j}{2} \partial_{U_j U_i} H_{P_m} \right)_{1 \le i,j \le m} &= p_m(p_m - 1) \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m - 2} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_m-2}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} \left((a_{ij})_{1 \le i,j \le m} \right) \\ &\quad \times U_1^{p_1} U_2^{p_2 - p_1} U_3^{p_3 - p_2} ... U_m^{(P_m - 2) - P_{m-1}} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Lorsque $(a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ est une matrice définie dans la formule (3.12).

Nous démontrons qu'il existe une constante positive C_2 indépendante de $t \in [0, T_{\max}[$ telle que

$$I_1 \le C_2 \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}[\tag{3.27}$$

et cela

$$I_2 \le 0 \tag{3.28}$$

pour certaines conditions aux bords. :

(i) Si $0 < \lambda < 1$, utilisant les conditions aux limites (3.2) on obtient

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{U_i} H_{P_m} \left(\gamma_1 - \alpha U_i \right) d\sigma,$$

où $\alpha = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda}$ et $\gamma_i = \dfrac{\rho_i}{1 - \lambda}$, $i = 1, 2, ..., m$. Puisque $K(U_1, U_2, ..., U_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{U_i} H_{P_m} \left(\gamma_1 - \alpha U_i \right) = P_{n-1}(U_1, ..., U_m) - Q_n(U_1, ..., U_m)$, où P_{n-1} et Q_n Sont des polynômes à coefficients positifs et des degrés $(n-1)$ et n respectivement et puisque la solution est positive, alors

$$\limsup_{(|U_1| + |U_2| + ... + |U_m|) \longrightarrow \infty} K(U_1, U_2, ..., U_m) = -\infty \tag{3.29}$$

Qui prouve que K est uniformément bornée sur $\mathbb{R}^m_+$ et par conséquent (3.22)
(ii) Si $\lambda = 0$, alors $I_1 = 0$ sur $[0, T_{\max}[$.
(iii) Le cas de la condition homogène de Dirichlet est trivial, puisque dans ce cas la positivité de la solution sur $[0, T_{\max}[\times\Omega$ implique $\partial_\eta U_i \leq 0$, $\forall i = 1, .., m$, sur $[0, T_{\max}[\times\partial\Omega$. Par conséquent on obtient encore (3.22) avec $C_2 = 0$.
(iv) Si quelques conditions aux bords sont homogènes de Dirichlet et d'autres sont nonhomogènes de Robin, par exemple $U_1 = 0, \lambda U_i + (1-\lambda)\partial_\eta U_i = \beta_i$ pour $i = 2, .., m$, alors le suivant le même raisonnement que ci-dessus nous obtenons

$$\limsup_{(|U_2|+...+|U_m|)\longrightarrow\infty} K(0, U_2, ..., U_m) = -\infty \tag{3.30}$$

Puis (3.24)
Maintenant nous prouvons (3.25).
$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$est une matrice définie dans la formule (3.12).
Les formes quadratiques (par rapport à ∇U_i , $i = 1, .., m$) associées aux matrices $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, $P_1 = 0, ..., P_2; P_2 = 0, ..., P_3;$ ....,$P_{m-1} = 0, ..., P_m - 2$ sont positives puisque leur déterminant principal $\det 1, \det 2, ..., \det m$ sont également positifs. Pour voir cela, nous avons les éléments suivants :

$$\begin{aligned} (*)\quad \det 1 &= \lambda_1\theta_1^{(P_1+2)^2}\,\theta_2^{(P_2+2)^2}...\theta_{(m-1)}^{(P_{(m-1)}+2)^2} > 0 \text{ pour } P_1 = 0, ..., P_2; P_2 = 0, ..., P_3; \\ ; ...; ....; P_{m-1} &= 0, ..., P_m - 2 \end{aligned}$$

$(**)$Selon le lemme 3, on obtient

$$\det 2 = K_2^2 = \lambda_1\lambda_2\theta_1^{2(P_1+2)^2}\prod_{k=2}^{m-1}\theta_k^{2(P_k+2)^2}\left[\theta_1^2 - A_{12}^2\right],$$

En utilisant (3.11) pour $l = 2$ on obtient $\det 2 > 0$.
$(***)$Toujours selon le lemme 3, nous avons

$$K_3^3 = \det 3 \det 1,$$

Mais $\det 1 > 0$, donc $sign(K_3^3) = sign(\det 3)$.
En utilisant (3.11) pour $l = 3$ on obtient $\det 3 > 0$.
$(****)$On suppose que $\det k > 0, k = 1, ..., l-1$ et prouve que $\det l > 0$

$$\det k > 0, k = 1, ..., l-1 \Longrightarrow \prod_{k=1}^{k=l-2}(\det k)^{2^{(l-k-2)}} > 0 \tag{*}$$

À partir du lemme 3, $K_l^l = \det l.\prod_{k=1}^{k=l-2}(\det k)^{2^{(l-k-2)}}$, et de (*), on obtient $sign(K_l^l) = sign(\det l)$ mais $K_l^l > 0$, de (3.11), donc $\det l > 0$.Nous obtenons (3.25).

Maintenant on montre que J est bornée.

Nous substituons les expressions des dérivées partielles données par lemma(1) dans la deuxième intégrale (3.18), on obtient.

$$
\begin{aligned}
J &= \int_\Omega \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} \dots U_m^{(P_m-1)-p_{m-1}} \right] \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} F_1 + \sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} F_j + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} F_m \right) dx \\
&= \int_\Omega \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} \dots U_m^{(P_m-1)-p_{m-1}} \right] \\
&\quad \times \left(\begin{array}{l}
\left(\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_1^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_1^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_1^m \right) f_1 + \\
\left(\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_2^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_2^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_2^m \right) f_2 + \\
\dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots + \\
+ \left(\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_m^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_m^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_m^m \right) f_m dx
\end{array} \right) \\
&= \int_\Omega \left[p_m \sum_{p_{m-1}=0}^{p_m-1} \dots \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} \dots C_{p_2}^{p_1} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} \dots U_m^{(P_m-1)-p_{m-1}} \right] \\
&\quad \times \left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_1^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_1^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_1^m}{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_m^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_m^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_m^m} \right) f_1 + \\
\left(\frac{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_2^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_2^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_2^m}{\prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_m^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_m^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_m^m} \right) f_2 + \\
\dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots + (\dots\dots\dots\dots) f_{m-1} + f_m
\end{array} \right) .\delta dx \\
\text{où } \delta &= \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} x_m^1 + \left(\sum_{j=2}^{m-1} \prod_{k=1}^{j-1} \theta_k^{P_k^2} \prod_{i=j}^{m-1} \theta_i^{(P_i+1)^2} \right) \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_m^j \right) + \prod_{i=1}^{m-1} \theta_i^{P_i^2} x_m^m
\end{aligned}
$$

En utilisant la condition (3.5) et la relation (3.14) successivement, on obtient

$$J \leq C_5 \int_\Omega \left[\sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-1} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} ... U_m^{(P_m-1)-P_{m-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} U_i\right)\right] dx$$

Pour démontrer que la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$, on écrit d'abord

$$\begin{aligned} & \sum_{p_{(m-1)}=0}^{p_m-1} ... \sum_{p_1=0}^{p_2} C_{p_{m-1}}^{p_{m-1}} ... C_{p_2}^{p_1} U_1^{p_1} U_2^{p_2-p_1} U_3^{p_3-p_2} ... U_m^{(P_m-1)-P_{m-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} U_i\right) \\ = \quad & \mathbb{R}_{P_m}(U_1, U_2, ..., U_m) + S_{P_m-1}(U_1, U_2, ..., U_m), \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}_{P_m}(U_1, ..., U_m) + S_{P_m-1}(U_1, ..., U_m)$ sont deux polynômes homogènes de degrés P_m et $P_m - 1$, respectivement. Tout d'abord, puisque les polynômes H_{P_m} et $\mathbb{R}_{P_m}$sont tous de degré P_m , il existe une constante positive C_6 telle que ch

$$\int_\Omega \mathbb{R}_{P_m}(U_1, U_2, ..., U_m) dx \leq C_6 \int_\Omega H_{P_m}(U_1, U_2, ..., U_m) dx \tag{3.31}$$

alors appliquons l'inégalité de Hölder à l'intégrale $\int_\Omega S_{P_m-1}(U_1, U_2, ..., U_m) dx$, on obtient

$$\int_\Omega S_{P_m-1}(U_1, U_2, ..., U_m) dx \leq (mes\Omega)^{\frac{1}{p_m}} \left(\int_\Omega (S_{P_m-1}(U_1, U_2, ..., U_m))^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dx \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}.$$

Puisque pour tout $U_1, U_2, ..., U_{m-1} \geq 0$ et $U_m > 0$,

$$\frac{(S_{P_m-1}(U_1, U_2, ..., U_m))^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}}{H_{P_m}(U_1, U_2, ..., U_m)} = \frac{(S_{P_m-1}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}}{H_{P_m}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1)},$$

où $x_i = \dfrac{U_i}{U_{i+1}} \quad \forall i \in \{1, 2, .., m-1\}$ et

$$\lim_{x_i \longrightarrow +\infty} \frac{(S_{P_m-1}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1))^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}}{H_{P_m}(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 1)} < +\infty$$

On affirme qu'il existe une constante positive C_7 telle que

$$\frac{(S_{P_m-1}(U_1, U_2, ..., U_m))^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}}{H_{P_m}(U_1, U_2, ..., U_m)} \leq C_7, \qquad \text{pour tout } U_1, U_2, ..., U_m \geq 0 \tag{3.32}$$

Par conséquent, la fonctionnelle L satisfait l'inégalité différentielle

$$L'(t) \leq C_8 L(t) + C_9 L^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}(t),$$

pour $Z = L^{\frac{1}{p_m}}$ peut être écrit comme

$$P_m Z^{'} \leq C_8 Z + C_9.$$

Une intégration simple donne l'union uniforme de la fonctionnelle L sur l'intervalle $[0, T^*]$; Ceci met fin à la preuve du théorème.

Corollaire 3.1 *Supposons que les fonctions f_i sont continument différentiables dans $\sum$ sur $\partial \sum$, et satisfont la condition (3.5) . Alors tous les solutions de $(3.1), (3.2), (3.3)$ avec des données initiales dans $\sum$ et uniformément bornées sur Ω sont dans $L^{\infty}(0, T^*, L^p(\Omega))$ pour tout $p \geq 1$.*

Preuve. La preuve de ce corollaire est une consequence immédiate du Théorème$(3, 1)$, l'inégalité évidente

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(t, x) \right)^p dx \leq C_{10} L(t) \quad sur [0, T^*[$$

pour tout $p \geq 1$. ■

Proposition 3.2 *Sous les hypothéses du corollaire $(3, 1)$, si f_i sont polynomialement bornées sur $\sum$, Alors tous les solutions de $(3.1), (3.2), (3.3)$ avec des données initiales dans $\sum$ et uniformément bornées sur Ω sont globales.*

Preuve. D'apres corollaire (3.1) , il existe un constante positive C_{11} telle que

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(t, x) + 1 \right)^p dx \leq C_{11} \quad sur [0; T^*[$$

et puisque les fonctions f_i sont polynomialement bornées sur $\sum$, en utilisant les relations $(3.9), (3.10)$ nous obtenons que F_i sont aussi polynomialement bornées et la preuve devient une conséquence immédiate du corollaire(3.1) . ■

Conclusion

Notre principale objectif est d'étudier l'existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion m$\times$m pleine, la méthode suivie, pour prouver l'existence globale est basée sur la construction d'une fonctionnelle de lyapunov et la construction d'une région invariant.
Dans ce travail, nous avons réussi à étendre les résultats connus dans le cas diagonal d'un système de réaction-diffusion m$\times m$ à la situation pleine avec matrice symètrique.

Bibliographie

[1] **S. Abdelmalek**, Invariant regions and global existence of solution for réaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions.J of App. Math. V 2007, ID (12375), 15 pages.

[2] **S. Abdelmalek**, Mémoire Existence Globale des Solutions des Systèmes de Réaction - Diffusion via des Méthodes Fonctionnelle.

[3] **S. Abdelmalek , and S. Kouachi**, Proof of existence of global solutions for m-component réaction-diffusion systems with mixed boundary conditions via the Lyapunov functional method. J. Phys. A : Math. Theor.40 (2007) 12335-12350

[4] **N.Alikakos** An application of the invariance principle to reaction–diffusion equations J. Diff.Eqns(1979) 33 201–25

[5] **D. G. Aronson and H. F. Weinberger**, "Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation", Lecture Notes in Mathematics 446, Springer, Berlin, (1975). (Cité page 35).

[6] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle théorie et application. Masson, Paris, (1983).

[7] **F. Dardalhon et F. Verga**, Le théorème de Hille Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires. Mémoire encadré par Florence Hubert, 7 juin (2006).

[8] **W B. Fitzgibbon, S. Hollis and J. Morgan** Stability and Lyapunov functions for réaction diffusion systems. SIAM J. Math. Anal.(1997) 28 595–610.

[9] **A. Friedman**, Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall Englewood Chiffs. N.J ;(1964).

[10] **F. R. Gantmacher**, "Théorie des matrices. Tome 1 : Théorie générale", Dunod, Paris, (1966). (Cité page 12)

[11] **F. R. Grantmacher**, The theory of matrices. Chelsea publishing company New York, N. Y, (1959).

[12] **D. Henry**, Geometric Theory of Semi-linear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlage, New-York, (1984).

[13] **S L. Hollis**, On the question of global existence for réaction–diffusion systems with mixed boundary conditions Q. Appl. Math.LI, number 2, June1993, pp. 241-250.

[14] **S L. Hollis, R H. Martin and M. Pierre** Global existence and boundedness in réaction diffusion systems.SIAM J. Math. Anal.(1987) 18 744–61.

[15] **S. Kouachi, S. Abdelmalek and B. Rebiai**, Existence of global solutions to réaction–diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional (at press).Electron. J. Di. Eqns Vol. 2001(2001), No. 68, pp. 1-10.

[16] **S. Kouachi**, Existence of global solutions to réaction–diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional. E. J. Diff. Eqns Vol. (2002), No. 88, pp. 1-13.

[17] **S. Kouachi**, Existence of global solutions to réaction–diffusion systems via a Lyapunov functional Electron. J. Diff. Eqns 2001 1–10. 12350 .

[18] **S. Kouachi, S. Abdelmalek and B. Rebiai**, Mathematical proof of Dodgson's algorithm (at press)

[19] **S. Kouachi,** Existence globale et explosion des solutions des certains systémes d'équations aux d´erivées partielles, thése de doctorat d'état (1999).

[20] **S. Kouachi,** Invariant régions and global existence of solution for réaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficient and nonhomogeneous boundary conditions. Georgian mathematical journal volume 11 (2004) No 2, 349-359.

[21] **S. Kouachi and B. Rebiai**, Invariant regions and the global existence for réaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics volume 51,2010,93-108

[22] **S. Kouachi and A. Youkana,** Global existence for a class of réaction–diffusion systems Bull. Pol. Acad. Sci.(2001)49 303–8.

[23] **T. Lelièvre**, Equation aux dérivées partielles. 2009-2010.

[24] **R H. Martin and M. Pierre**, Nonlinear réaction–diffusion systems Nonlinear Equations in the Applied Sciences Math. Sci. Engrg, 185, Academic Press, Boston, MA, pp. 363-398, 1992.

[25] **K. Masuda,** On the global existence and asymptotic behavior of solutions of réaction–diffusion équations Hokkaido Math. J. 12 (1983), pp. 360-370.

[26] **J. Morgan**, Global existence for semilinear parabolic systems, SIAM J. Math. Anal.(1989) 20 1128–44.

[27] **A.Munnier**, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy 1, B. P, 2007-2008.

[28] **B. Nouri, and T. Abdelatif**, On the invariant regions and global existence.

[29] **A. Pazy**, Semi groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York (1983).

[30] **C.V.Pao**, Réaction-Diffusion Equation with Nonlinear Boundary Condition. Nonlinéar Analysis 5. (1981) 1077-1094.

[31] **B. Rebiai** , Mémoire de Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse.

[32] **J. Smoller**, Shock Waves and Réaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New-York (1983).

[33] **M. R. Spiegel**, Théorie et Applications de L'analyse, Serie Schaum, (1982).

[34] **F. Webb**, A Réaction-Diffusion Model For a Deterministic Diffusive Epidemic, J. Math.Anal .Appl.84(1981).

[35] **A.Zerai**, cour d 'équation d'evolution 2ème Année Master (2015). Université de tebessa.